УДК 511.41

ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ, ЇХ ФІНІТИЗАЦІЯ ТА ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

З.Ю. Філєр, А.С. Чуйков

Рассматривается комплексная форма построения подходящих дробей для рациональных чисел и квадратичных иррациональностей. Предлагается финитизация координатной плоскости для изображений подходящих дробей.

The complex form of the construction of suitable fractions for rational numbers and quadratic irrationalities is considered. Finitization of the coordinate plane for images suitable fractions is proposed.

Значний вклад у розвиток теорії ланцюгових дробів вніс О.Я. Хінчин, професор (1927), доктор фізико-математичних наук (1935), член-кореспондент АН СРСР (1939). Сферу наукових інтересів Хінчина здебільшого охоплювали три області математики: теорію ймовірностей, теорію чисел та теорію функцій комплексної змінної. Світову славу принесли ученому формула Леві – Хінчина для характеристичної функції процесу у теорії стохастичних процесів Леві, закон повторного логарифму, результати в області граничних теорем, роботи по теорії діофантових наближень і багато іншого.

Хінчин плідно займався проблемами освіти у Радянському Союзі. У книзі «Педагогічні статті» (1963) зібрані статті педагога різних років. Учений часто виступав з методичними доповідями перед вчителями шкіл, у Академії педагогічних наук РРФСР, Московському математичному товаристві. За більш ніж 40-річну наукову діяльність учений створив близько 150 робіт [5], ще 7 праць вийшло посмертно, після 18.11.1959 р.

Вираз вигляду $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, $a_k \in N$

називається елементарним *ланцюговим* дробом . Відомо, якщо послідовність (a_i) – скінченна, то ланцюговий дріб рівний деякому раціональному числу.

Апаратом для знаходження елементів скінченного ланцюгового дробу $\frac{p}{q}=[a_0;a_1,a_2,...,a_n]$ є *алгоритм Евкліда* знаходження НСД, який дає також елементи ланцюгового дробу, які є неповними частками у послідовному діленні. Наприклад, дріб $\frac{711}{236}$ дає при використанні цього алгоритму «драбину», з якої дістаємо не тільки НСД(711,236)=1, але й рівний йому ланцюговий дріб $[3;78,1,2]$.

Якщо послідовність (a_i) нескінченна, то ланцюговий дріб рівний деякому ірраціональному числу. При чому, має місце

теорема Ейлера-Лагранжа [4, с. 63]: Ланцюговий дріб α періодичний тоді і тільки тоді, коли α – ***квадратична*** ірраціональність.

У загальному випадку квадратична ірраціональність має вигляд $x+y\sqrt{D}$, де $x,y\in Q$, а D – ціле додатне число, відмінне від квадрату.

Лема [2, с. 214]: Якщо d – натуральне число, яке не є квадратом ніякого цілого числа, то $\sqrt{d}=[a_0;\overline{a_1,a_2,...a_k,2a_0}]$, де $a_0=[\sqrt{d}]$, при чому впорядкований набір чисел $a_1,...,a_k$ симетричний, тобто $a_1=a_k, a_2=a_{k-1}$ і т. д.

Якщо $\sqrt{d}=\sqrt{n^2+1}$, то $[\sqrt{d}]=n$ і $x=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2n+x}$, тому для таких чисел ланцюговий дріб має вигляд $\sqrt{d}=[n;\overline{2n}]$.

$$
\begin{array}{r|l}
-\,711 & 236 \\
708 & 3 \\
\hline
-\,236 & 3 \\
234 & 78 \\
\hline
-\,3 & 2 \\
2 & 1 \\
\hline
-\,2 & 1 \\
2 & 2 \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Наприклад, розклад числа $\sqrt{177}$ здійснюється так (тут $\{\sqrt{177}\}=\sqrt{177}-13$ – дробова частина $\sqrt{177}$)

$$\sqrt{177}=13+\{\sqrt{177}\}=13+\frac{177-169}{\sqrt{177}+13}=13+\frac{1}{\frac{26+\{\sqrt{177}\}}{8}}=13+\frac{1}{3+\frac{\sqrt{177}-11}{8}}=$$

$$=13+\cfrac{1}{3+\cfrac{56}{8(\sqrt{177}+11)}}=13+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{177}+11}{7}}}=13+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{24+\{\sqrt{177}\}}{7}}}=13+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{\sqrt{177}-10}{7}}}=$$

$$=13+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{77}{7(\sqrt{177}+10)}}}=13+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{177}+10}{11}}\cdots}}=\ldots\ldots=\left[13;\overline{3,3,2,8,2,3,3,26}\right].$$

Для знаходження підхідних дробів до відомого ланцюгового дробу застосовуються формули для *к*-го підхідного дробу

$$\alpha_k=\frac{p_k}{q_k}:\ p_k=a_k p_{k-1}+p_{k-2},q_k=a_k q_{k-1}+q_{k-2}. \tag{1}$$

Комплексна форма алгоритму (1). Помноживши другу рівність на i та додавши до першої, отримуємо для комплексної величини $r_k=p_k+iq_k$ рекурентну формулу

$$r_k=a_k\cdot r_{k-1}+r_{k-2};r_{-1}=1,r_0=a_0+i. \tag{2}$$

При цьому $p_k=\operatorname{Re}r_k,q_k=\operatorname{Im}r_k$, підхідний дріб $\alpha_k=\dfrac{p_k}{q_k}=\dfrac{\operatorname{Re}r_k}{\operatorname{Im}r_k}$.

Приклад. $\alpha=[3;1,4,7,6]=\dfrac{841}{221}$. Цей результат отримано безпосереднім обчисленням «з кінця».

k	*a*	*r*	*p*	*q*	*p/q*
-1	1	1	1	0	
0	3	3+i	3	1	3
1	1	4+i	4	1	4
2	4	19+5i	19	5	19/5
3	7	137+36i	137	36	137/36
4	6	841+221i	841	221	841/221

Ланцюгові дроби з комплексними елементами. Для *комплексних* елементів ланцюгового: дробу a_k+ib_k формула (1) дає вірні результати [6, с. 158]:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_k = (a_k + ib_k)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{k-1} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{k-2}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} a_0 + ib_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2a)$$

Розглянемо приклад – ланцюговий дріб [0;2-i,3+2i,4-3i].

Для нашого прикладу вектори з чисельників та знаменників підхідних дробів дорівнюють:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_1 = (2-i)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_2 = (3+2i)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 9+i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}_3 = (4-3i)\begin{pmatrix} 3+2i \\ 9+i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19-i \\ 41-24i \end{pmatrix}$$

Цікаво встановити умови розкладання дробу $\frac{a+bi}{c+di}$ з цілими $a,b,c,d.$ у ланцюговий дріб. Очевидно, що достатньо лінійної залежності векторів (a,b) і (c,d).

Число цифр до періоду та в періоді. Відомий алгоритм перетворення звичайних дробів у *десятковий* періодичний дріб. Ще Гаусом було встановлено, що кількість цифр *до* періоду (після коми) дорівнює m, де m – є показник степеня 2 або 5 у розкладі знаменника. Кількість цифр у періоді не перевищує $l = q-1$, де q є знаменник, ділений на 2^m (5^m). Наприклад, $\frac{183}{112} = 1{,}6339(285714)$. Розклад знаменника 112 є $2^4 \cdot 7$. Цікаво було б отримати відповідні оцінки для *ланцюгових* періодичних дробів.

Зображення підхідних дробів до ланцюгового дробу. У книзі [1] приведено геометричний алгоритм знаходження ланцюгового дробу, який називається алгоритмом «витягування носів». Будується пряма $y = \alpha x$, і здійснюється додавання базисних векторів до тих пір, поки не перескочимо через пряму. Для ірраціонального числа цей процес буде нескінченним..

Отримати скінченну точку на площині, яка є границею точок з координатами $(p_k;q_k)$ для нескінченного ланцюгового дробу можна, якщо здійснити фінітизацію [3] чисельника і знаменника ланцюгового дробу за формулою $\tilde{x} = (1-Q^x)/(1-Q)$. Інакше точка $(p_k; q_k) \to \infty$.

Зображення фінітизованого нескінченного ланцюгового дробу лежить на колі радіуса $R = \frac{1}{1-Q}.,0 < Q < 1..$

Приклади. 1-й: При $Q = 9/10$ точка (17; 13) є зображенням числа $\alpha = \frac{17}{13};$ відповідна точка $\tilde{\alpha} = \frac{1-Q^{p_4}}{1-Q^{q_4}} = 1{,}12$ знаходиться значно ближче до початку координат.

2.-й. Для $\sqrt{177}$ чисельники і знаменники підхідних дробів необмежено зростають, особливо $p_к$, тому приходиться вибрати різний масштаб по осях координат. Фінітизація дозволяє зобразити скінченну точку $(\bar{p};\bar{q})$, де $\bar{p} = \bar{q}$ є $\lim p_k = \lim q_k = \frac{1/(1-Q)}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}$ при $Q = 9/10$.

На рис. 1 і рис. 2 прийнято в якості знаменника прогресії Q число 9/10.

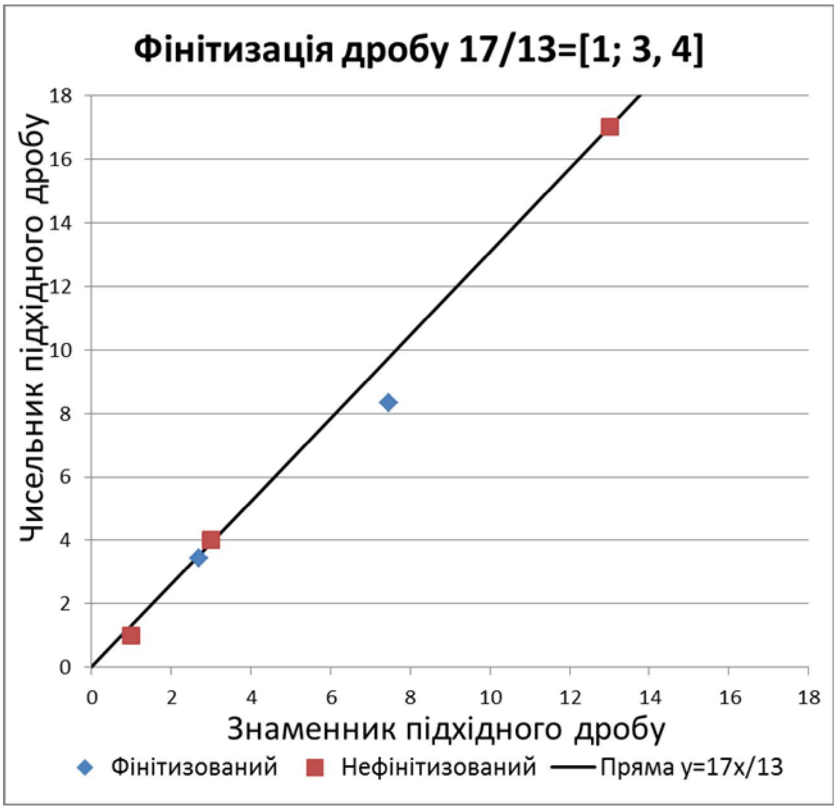

Рис 1. Фінітизація скінченного ланцюгового дробу

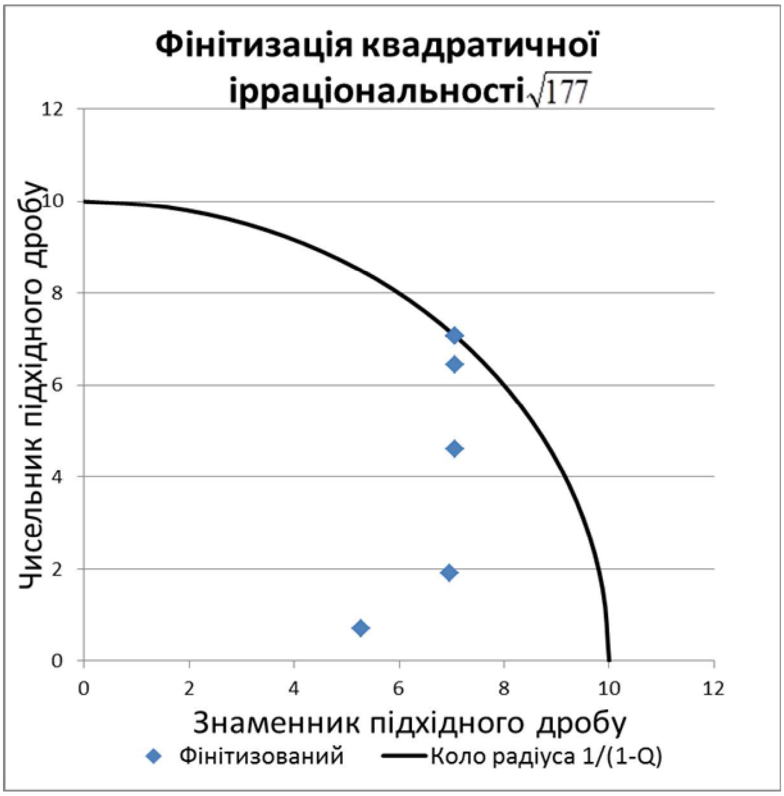

Рис 2. Фінітизація нескінченного ланцюгового дробу

ПОСИЛАННЯ

[1] Арнольд В.И. *Цепные дроби* – М.: Изд-во МЦНМО, 2009. – 40 с.

[2] Нестеренко Ю. В. *Теория чисел: учебник для студ. высш. учеб. заведений/* Ю.В.Нестеренко.– М.: Академия, 2008.– 272 с.

[3] Филер З.Е. Линии на финитизированной плоскости// *Матеріали 13 Міжвузівського наук.-практ. Семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування».* – Кіровоград, КНТУ, 2012. – С. 159 – 165.

[4] Хинчин А.Я. *Цепные дроби.* Изд. 4.– М.: Наука, 1978. – 112 с.

[5] Хинчин А.Я./ В кн.: *Математика в СССР за сорок лет 1917-1957.* т. 2. Биобиблиография. – М.: Физматгиз. 1959.- 820 с.

[6] Чуйков А.С., Філєр З.Ю. Життя та наукові інтереси Олександра Яковича Хінчина// Історія науки – майбутньому вчителеві. *Збірник матеріалів Всеукр. студентської конференції.* – Умань: УДПУ, 2014. – С. 155 – 158.